BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

*№1* *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2014*

**UDK-539.12.01**

# ELASTİKLİK NƏZƏRİYYƏSİ TƏNLİYİNİN İNVARİANTLIQ QRUP OPERATORLARI ÜÇÜN KİLLİNQİN İNVARİANT KVADRATİK FORMASININ TAPILMASI

**Ə.Q.AĞAMALIYEV, S.A.ABASZADƏ**
***Bakı Dövlət Universiteti***
***guluoglu@mail.ru***

*Təqdim olunan işdə elastiklik nəzəriyyəsi tənliyinin qrup operatorları üçün Killinqin invariant kvadratik forması tapılmışdır. Bunun üçün əvvəlki işlərimizdə tapılmış elastiklik nəzəriyyəsi tənliyinin invariantlıq operatorlarının aşkar şəklindən və onların kommutasiya şərtlərindən istifadə edilmişdir.*

**Açar sözlər**: qrup, elastiklik tənliyi, invariant kvadratik forma.

Elastiklik nəzəriyyəsi tənliyinin ifadəsi aşağıdakı kimidir:

$$\rho\vec{u}_{tt} - (\lambda + \mu) graddiv\vec{u} + \mu rotrot\vec{u} = 0$$

Həmin tənliyin invariantlıq operatorları

$$\left(\underset{2}{X} F_1\right)_{F_1=0} = 0 \quad \left(\underset{2}{X} F_2\right)_{F_2=0} = 0 \quad \left(\underset{2}{X} F_3\right)_{F_3=0} = 0$$

şərtindən tapılır.

İnvariantlıq şərtinin aşkar şəkli

$$(\underset{2}{X} F_{\substack{1\\2\\3}})_{F_{1,2,3}=0} = [(X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial U_i^\alpha} + \zeta_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial U_{ij}^\alpha})F_{\substack{1\\2\\3}}]_{F_{1,2,3}=0} = 0$$

tənliyi formasındadır. Bu tənliyə daxil olan $\zeta_i^\alpha$ və $\zeta_{ij}^\alpha$ kəmiyyətləri aşağıdakı düsturlar vasitəsilə ifadə olunur.

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_i^\alpha D_i(\xi^j)$$
$$\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k)$$

Hesablamaların nəticəsində qrupun invariantlıq operatorlarının aşkar şəkli tapılmışdır və aşağıdakı şəkildə təyin olunmuşdur.

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\ X_2=\frac{\partial}{\partial x},\ X_3=\frac{\partial}{\partial y},\ X_4=\frac{\partial}{\partial z},\ X_5=\frac{\partial}{\partial u^1},\ X_6=\frac{\partial}{\partial u^2},\ X_7=\frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$X_8=-x\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial x}-u^1\frac{\partial}{\partial u^2}+u^2\frac{\partial}{\partial u^1}$$

$$X_9=-z\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z}-u^3\frac{\partial}{\partial u^1}+u^1\frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$X_{10}=-y\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial y}-u^2\frac{\partial}{\partial u^3}+u^3\frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$X_{11}=u^1\frac{\partial}{\partial u^1}+u^2\frac{\partial}{\partial u^2}+u^3\frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$X_{12}=t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$$

Aldığımız operatorların aşkar şəklini bilərək kvadratik formanın tapılması üçün həmin operatorların kommutasiya şərtlərini tapmaq lazım gəlmişdir. Onlar hesablanmış və cədvəl şəklində verilmişdir.

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | $X_8$ | $X_9$ | $X_{10}$ | $X_{11}$ | $X_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | | | | | | | | | | | | $X_1$ |
| $X_2$ | | | | | | | | $-X_3$ | $-X_4$ | | | $X_2$ |
| $X_3$ | | | | | | | | $X_2$ | | $-X_4$ | | $X_3$ |
| $X_4$ | | | | | | | | | $-X_2$ | $X_3$ | | $X_4$ |
| $X_5$ | | | | | | | | $-X_6$ | $X_7$ | | $X_5$ | |
| $X_6$ | | | | | | | | $X_5$ | | $-X_7$ | $X_6$ | |
| $X_7$ | | | | | | | | | $-X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | |
| $X_8$ | | $X_3$ | $-X_2$ | | $X_6$ | $-X_5$ | | | $-X_{10}$ | $X_9$ | | |
| $X_9$ | | $X_4$ | | $X_2$ | $-X_7$ | | $-X_5$ | $X_{10}$ | | $-X_8$ | | |
| $X_{10}$ | | | $X_4$ | $-X_3$ | | $X_7$ | $-X_6$ | $-X_9$ | $X_8$ | | | |
| $X_{11}$ | | | | | $-X_5$ | $-X_6$ | $-X_7$ | | | | | |
| $X_{12}$ | $-X_1$ | $-X_2$ | $-X_3$ | $-X_4$ | | | | | | | | |

I tərtibdən optimal operatorlar sistemini tapmaq üçün *ad*(X) ifadəsini tapmaq lazımdır. Həmin ifadə [X, Y] kommutasiyasını hesablamaqla əldə olunur

$$[X,Y]=[x^i X_i, y^k X_k]$$

Bu düstura əsasən kommutasiyalar hesablanır və $X_1, X_2, \dots, X_{12}$ operatorlarının əmsallarından matrisa düzəldilir. Daha sonra bu ifadə matrisə şəklində yazılır.

$$\begin{pmatrix}
-x^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^1 \\
0 & -x^{12} & -x^8 & -x^9 & 0 & 0 & x^3 & x^4 & 0 & 0 & 0 & x^2 \\
0 & x^8 & -x^{12} & -x^{10} & 0 & 0 & x^2 & -x^3 & x^4 & 0 & 0 & x^3 \\
0 & x^9 & x^{10} & -x^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^3 & 0 & 0 & x^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -x^{11} & -x^8 & x^6 & x^7 & 0 & -x^9 & x^5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x^8 & -x^{11} & -x^5 & 0 & x^7 & -x^{10} & x^6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x^9 & x^{10} & 0 & -x^5 & -x^6 & -x^{11} & x^7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^{10} & x^9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{10} & 0 & -x^8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^9 & x^8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}^2$$

Alınan matrisadan istifadə edərək Killinqin kvadratik forması hesablanır və Killinqin formasının aşkar şəkli tapılır.

Qrup üzrə təyin olunmuş simmetrik kvadratik forma

$$\Phi(x\cdot y)=\Phi\left(\hat{A}(X),\hat{A}(Y)\right)$$

şərtini ödəyən bixətti formaya deyilir. Li qrupunun Li cəbrinin struktur nəzəriyyəsini təyin etmək üçün xüsusi təyin olunmuş K kvadratik forması mühüm rol oynayır. Bu kvadratik formanın təyin edilməsi xətti çevirmənin izi ilə sıx əlaqədardır. İz operasiyasının mühüm xassələrindən biri

$$tr(\hat{A}\cdot\hat{B})=tr(\hat{B}\cdot\hat{A})$$

şərtini odənməsidir.

Aşağıdakı şərti ödəyən

$$K(X,Y)=tr\left(ad(X)\cdot ad(Y)\right)$$

simmetrik bixətti formaya Killinqin kvadratik forması deyilir. Killinqin invariant kvadratik formasının əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, həmin formanın aşkar şəklini bilərək Li cəbrinin radikalını (maksimal idalini) xarakterizə etmək mümkündür. Killinqin kvadratik formasını tapmaq üçün verilmiş diferensial tənliyin invariantlıq operatorlarının aşkar şəklini bilmək lazımdır. Həmin operatorların aşkar şəkli və kommutasiyası hesablanmışdır. Bu işlərin nəticəsindən istifadə edərək invariant kvadratik formasının ifadəsi tapılmışdır.

$$K(X,X)=4(X^{12})^2-6(X^8)^2-6[\![(X]\!]^9)^2-6[\![(X]\!]^{10})^2+3[\![(X]\!]^{11})^2$$

## ƏDƏBİYYAT

1.Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. 1983, 280 с.
2.Тиханов А.М., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1977, 736 с.

3.Овсянников Л.В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. ДАН СССР 118, №3, 1958, с.439-442
4.Олвер П.Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.М.: Мир,1989, 639с.
5.Ağamalıyev Ə.Q. BDU-nun xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası. №2, 2006, s. 148-154
6. Ağamalıyev Ə.Q. BDU-nun xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası. №2, 2007, s. 140-143

## НАХОЖДЕНИЕ ИНВАРИАНТНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ КИЛЛИНГА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ГРУППЫ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**А.Г.АГАМАЛИЕВ, С.А.АБАСЗАДЕ**

**РЕЗЮМЕ**

В предлагаемой работе найдена инвариантная квадратичная форма Киллинга для операторов группы инвариантности уравнения теории упругости. Мы воспользовались условиями коммутации и явной формой операторов инвариантности теории упругости, которые были найдены в предыдущих работах.

**Ключевые слова:** группа, уравнение упругости, инвариантная квадратичная форма

## FINDING OF KILLING’S INVARIANT SQUARE-LAW FORM FOR OPERATORS OF A GROUP OF INVARIANCY OF THE EQUATIONS OF THE THEORY OF ELASTICITY

**A.G.AGHAMALIYEV, S.A.ABASZADEH**

**SUMMARY**

Killing’s invariant square-law form is found for the operators of the group of invariancy of the equation of the theory of elasticity.

We have used commutation conditions and the obvious form of operators of invariancy of the theory of elasticity which were found in the previous works.

**Key words:** Group, equation of elasticity, invariant square form

*Redaksiyaya daxil oldu: 22.01.2014-cü il*
*Çapa imzalanmışdır: 04.04.2014-cü il.*